

5. cvičení - Implicitní funkce

Příklad 1. Ukažte, že uvedená soustava rovnic určuje v jistém okolí $[x_0, y_0, u_0, v_0]$ implicitně zadané funkce u, v v proměnných x a y . Potom spočtete parciální derivace obou funkcí v bodě $[x_0, y_0]$.

- (a) $x = u \cos \frac{v}{u}, \quad y = u \sin \frac{v}{u}, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 0, 1, 0]$.
- (b) $xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 2, 0, 0]$.
- (c) $x = e^u + u \sin v, \quad y = e^u - u \cos v, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1 + e, e, 1, \frac{\pi}{2}]$.
- (d) $5xu + 3yv = 4x^2y + 4u^2v, \quad 4xyu^3 + xv^2 = 5yuv, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 1, 1, 1]$.

Příklad 2. (Skúškové) V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí předepsaného bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci proměnné y . Dále spočtete její první i druhou derivaci v y_0 . Potom vyšetříte, či daná funkcia rastie, klesá, vyšetříte konvexitu, konkávitu a nakoniec napíšete predpis tečnej priamky ke grafu tejto funkcie v bode y_0 .

- (a) $\arccos(\log x + \log y) = 3 \arcsin \frac{x+y}{4}, [x_0, y_0] = [1, 1]$.
- (b) $\sin(\arctan x + \arctan(2y)) + \cos(\arctan x + \arctan(2y)) = 1, [x_0, y_0] = [-1, \frac{1}{2}]$.
- (c) $\arctan(x + \sin y) + \arctan(x + \cos y) = \frac{\pi}{4}, [x_0, y_0] = [1, \pi]$.

Příklad 3 (Bez vzorového řešení). V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí předepsaného bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x . Dále spočtete její první i druhou derivaci v x_0 a napište rovnici tečné přímky ke grafu této funkce v bodě x_0 .

- (a) $\log \frac{\tan x + 2 \tan y}{3} + \log \frac{2 \tan x + \tan y}{3} = 0, [x_0, y_0] = [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.
- (b) $\sin(e^x - e^y) + 3 \sin \frac{x+y}{2} + \cos(x - y) = 1, [x_0, y_0] = [\pi, \pi]$.
- (c) $\log(x + y^3) + e^{x+2y} = 1, [x_0, y_0] = [2, -1]$.
- (d) $e^{x^2+y-2} + e^{y^2-x} = 2, [x_0, y_0] = [1, 1]$.

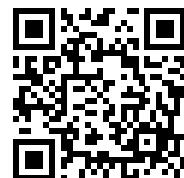
Příklad 4. (Skúškové, riešené rukou)

- (a) Majme nasledujúce vzťahy

$$\sin(u + v) + \sin(x + yu) = 0$$

$$\sin(u - v) + \sin(x + yv) = 0$$

Ukážte, že vzťahy definujú na okolí bodu $[0, 0, 0, 0]$ funkcie φ_1, φ_2 v premenných x, y triedy $\mathcal{C}^\infty$, pre ktoré platí $\varphi_1(0, 0) = 0, \varphi_2(0, 0) = 0$. Spočítajte obidve parciálne derivácie φ_1 v bode $(0, 0)$.



(b) Majme nasledujúce vzťahy

$$e^{x+u} + e^{y+v} - 2 \cos(y+v) = 0$$

$$\log(1+x+u) + y \arctan(u+v) = 0$$

Ukážte, že vzťahy definujú na okolí bodu $[0, 0, 0, 0]$ funkcie φ_1, φ_2 v premenných x, y triedy $\mathcal{C}^\infty$, pre ktoré platí $\varphi_1(0, 0) = 0, \varphi_2(0, 0) = 0$. Spočítajte obidve parciálne derivácie φ_1 v bode $(0, 0)$.

(c) Majme nasledujúce vzťahy

$$\frac{4}{\pi} \arctan(u+xu) + v \arctan(yv) = 1$$

$$\cos(xu+yv) + e^{xv} = 2v^2$$

Ukážte, že vzťahy definujú na okolí bodu $[0, 0, 0, 0]$ funkcie φ_1, φ_2 v premenných x, y triedy $\mathcal{C}^\infty$, pre ktoré platí $\varphi_1(0, 0) = 1, \varphi_2(0, 0) = 1$. Spočítajte obidve parciálne derivácie φ_1 v bode $(0, 0)$.

